МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ, МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И ИННОВАЦИЙ КЫРГЫЗСКОЙ РЕСПУБЛИКИ

МОО ВО Кыргызско-Российский Славянский университет
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

УТВЕРЖДАЮ
Директор
(должность)
Лесев Г.В
(ФИО)
3 сентября____2026 г.

Теория упругости

рабочая программа дисциплины (модуля)

Закреплена за кафедрой **Высшая школа Природопользования, мехатроники и транспорта**

Учебный план Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"

Квалификация **бакалавр**
Форма обучения **очная**

Общая трудоемкость **7 ЗЕТ**
Часов по учебному плану 252
в том числе:
аудиторные занятия 96
самостоятельная работа 123,9

Виды контроля в семестрах:
зачет 5
экзамен 6

Распределение часов дисциплины по семестрам

Семестр (<Курс>.<Семестр на курсе>)	**5 (3.1)**		**6 (3.2)**		Итого	
Недель	17 2/6		16			
Вид занятий	УП	РП	УП	РП	УП	РП
Лекции	24	24	24	24	48	48
Практические	24	24	24	24	48	48
Контактная работа в период теоретического обучения	0,1	0,1			0,1	0,1
Контактная работа в период экзаменационной сессии			0,3	0,3	0,3	0,3
В том числе инт.	2	2	2	2	4	4
В том числе в форме практ.подготовки	2	2	2	2	4	4
Итого ауд.	48	48	48	48	96	96
Контактная работа	48,1	48,1	48,3	48,3	96,4	96,4
Сам. работа	59,9	59,9	64	64	123,9	123,9
Часы на контроль			31,7	31,7	31,7	31,7
Итого	108	108	144	144	252	252

Программу составил(и):
к.ф.-м.н., Комарцов Никита Михайлович

к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рецензент(ы):
к.т.н., Джаманкулов Азамат Кенешбекович

д.т.н., Муслимов Аннас Поясович

Согласовано РОП:
к.ф.-м.н., Герман Константин Анатольевич

Рабочая программа дисциплины
Теория упругости

разработана в соответствии с ФГОС 3++:

Федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 15.03.03 Прикладная механика (приказ Минобрнауки России от 09.08.2021 г. № 729)

составлена на основании учебного плана:

Направление 15.03.03 - РФ, 650500 - КР Прикладная механика
Профиль "Вычислительная механика и компьютерный инжиниринг"
утвержденного учёным советом вуза от 26.06.2026 протокол № 11.

Рабочая программа одобрена на заседании **Высшей школы Природопользования, мехатроники и транспорта**

Протокол от 02.09.2026 г. № 1
Срок действия программы: 2026-2032 уч.г.
Руководитель подразделения: Алсеитов Мирлан Тилегенович

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ
к рабочей программе дисциплины (модуля)

Теория упругости

№ п/п	Основание внесения изменения	Раздел/ пункт	Содержание изменения
1.			
2.			
3.			
4.			
5.			

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ	
1.1	Изучение физических и математических основ исследования напряженно-деформированного состояния в идеально упругом теле, которое подвергается силовому или тепловому воздействию.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ООП	
Цикл (раздел) ООП:	Б1.В.1
2.1	**Требования к предварительной подготовке обучающегося:**
2.1.1	Б1.О.3.13. Уравнения математической физики
2.1.2	Б1.О.2.06. Физика
2.1.3	Б1.О.2.01. Введение в высшую математику
2.1.4	Б1.О.3.02. Теоретическая механика
2.1.5	Б1.О.3.03. Сопротивление материалов
2.1.6	Б1.О.3.05. Материаловедение
2.1.7	Б1.О.3.01. Введение в профессиональную деятельность
2.1.8	Б1.О.2.02. Математический анализ
2.1.9	Б1.О.2.03. Линейная алгебра и аналитическая геометрия
2.1.10	Б1.О.3.10. Вариационное исчисление
2.1.11	Б1.О.2.04. Дифференциальные уравнения
2.2	**Дисциплины и практики, для которых освоение данной дисциплины (модуля) необходимо как предшествующее:**
2.2.1	Б3.О.02. Подготовка к сдаче и сдача государственного экзамена
2.2.2	Б1.В.1.07. Компьютерный инжиниринг
2.2.3	Б1.В.1.05. Планирование эксперимента и методы обработки данных
2.2.4	Б1.В.1.ДВ.03.01. Численные методы в прикладной механике
2.2.5	Б1.В.1.ДВ.04.01. Экспериментальная механика деформируемого твердого тела
2.2.6	Б3.О.03. Подготовка к процедуре защиты и защита выпускной квалификационной работы
2.2.7	Б2.О.02(Пд). Преддипломная практика

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)	
ПК-1: Способностью применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследования, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности	
Знать:	
Уровень 1	Физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности;
Уровень 2	
Уровень 3	
Уметь:	
Уровень 1	Применять физико-математический аппарат, теоретические, расчетные и экспериментальные методы исследований, методы математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности;
Уровень 2	
Уровень 3	
Владеть:	
Уровень 1	физико-математический аппаратом для проведения исследований; навыками использования математического и компьютерного моделирования в процессе профессиональной деятельности
Уровень 2	
Уровень 3	

В результате освоения дисциплины обучающийся должен

3.1	**Знать:**
3.1.1	Изучение физических и математических основ исследования напряженно-деформированного состояния в идеально упругом теле, которое подвергается силовому или тепловому воздействию.

3.2	**Уметь:**
3.2.1	исследовать напряженно деформированное состояние тел любой формы точными аналитическими и
3.2.2	вычислительными методами прикладной механики, а также с помощью программных систем компьютерного инжиниринга; осуществлять постановку прикладных задач, выбирать метод решения, оценивать точность
3.2.3	полученных результатов, как в аналитической форме, так и с использованием современных средств вычислительной техники.
3.3	**Владеть:**
3.3.1	расчетов точными аналитическими и вычислительными методами прикладной механики тел любой формы, находящихся под нагрузкой.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Код занятия	Наименование разделов и тем /вид занятия/	Семестр / Курс	Часов	Компетен-ции	Литература	Инте ракт.	Пр. подг.	Примечание
	Раздел 1. Модель упругого тела и напряжённое состояние							
1.1	Модель линейно упругого тела и границы её применения Сплошность, однородность и изотропия как независимые допущения; выбор масштаба модели детали. Малость деформаций и перемещений; различие физической и геометрической линейности. Объёмные и поверхностные силы; описание силового и температурного воздействия. Переход от стержневой модели сопротивления материалов к полю напряжений в объёме. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.2	Выбор расчётной модели упругой детали и проверка размерностей нагрузок. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.3	Напряжения на площадке и уравнения равновесия Вектор напряжений и формула Коши $t = \sigma n$; нормальная и касательная составляющие. Компоненты тензора напряжений и соглашение о знаках на гранях элемента. Симметрия тензора из баланса моментов в классической среде без моментных напряжений. Дифференциальные уравнения равновесия с объёмными силами и условия на нагруженной границе. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.4	Определение вектора напряжений и проверка равновесия поля. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

1.5	Главные напряжения и инварианты тензора Преобразование компонент при повороте осей; неизменность физического состояния. Собственные значения и направления тензора напряжений; определение главных площадок. Шаровая и девиаторная части; первый инвариант и интенсивность напряжений по Мизесу. Круг Мора для плоского состояния и интерпретация результатов расчёта детали. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.6	Расчёт главных напряжений, направлений и напряжения по Мизесу. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
1.7	Сопоставление пространственной и стержневой моделей одной детали. Проверка условий равновесия для самостоятельно выбранного простого поля напряжений. Сравнение главных напряжений и инвариантов до и после поворота осей. /Ср/	5	15	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 2. Деформации и физические соотношения							
2.1	Перемещения и малые деформации Поле перемещений и градиент перемещений в декартовых координатах. Формулы Коши для нормальных и сдвиговых деформаций; связь $\gamma xy = 2\varepsilon xy$. Разделение градиента перемещений на деформацию и малый поворот. Поступательное движение и жёсткий поворот как поля с нулевой малой деформацией. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.2	Вычисление малых деформаций и поворотов по полю перемещений. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

2.3	Совместность деформаций и определение перемещений Геометрический смысл условий совместности и требования к гладкости полей. Условие совместности в плоской задаче и его проверка для заданных функций. Пространственные условия Сен Венана в тензорной записи без развёртывания всех компонент. Восстановление плоского поля перемещений интегрированием и неопределённость жёсткого движения. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.4	Проверка совместности и восстановление плоского поля перемещений. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.5	Закон Гука для изотропного материала Тензорная и компонентная формы закона Гука при малых деформациях. Постоянные E, ν, G, K и Ламе; переход между наборами упругих параметров. Положительность энергии и ограничения $E > 0$, $-1 < \nu < 0{,}5$ для устойчивого изотропного материала. Одноосное растяжение, чистый сдвиг и гидростатическое нагружение как проверочные состояния. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.6	Пересчёт упругих констант и определение деформаций по закону Гука. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
2.7	Проверка нулевых деформаций при малом жёстком повороте. Пример несовместного поля деформаций и объяснение причины несовместности. Получение связей между E, ν, G, K и постоянными Ламе. /Ср/	5	15	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 3. Краевые задачи и плоская теория упругости							

3.1	Постановка пространственной краевой задачи Полная система уравнений равновесия, геометрических и физических соотношений. Граничные условия в перемещениях, усилиях и смешанная постановка на непересекающихся частях границы. Уравнения Навье в перемещениях для однородного изотропного тела. Единственность решения, жёсткие перемещения и условия разрешимости задачи только в усилиях. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.2	Постановка краевой задачи и устранение жёстких перемещений. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.3	Плоское напряжённое состояние и плоская деформация Обоснование плоского напряжённого состояния для тонкой пластины при нагрузках в её плоскости. Обоснование плоской деформации для протяжённого тела при соответствующих ограничениях. Матрицы упругости двух моделей и ненулевые εz либо σz. Выбор модели для плоской детали и длинного цилиндра; ограничения редукции трёхмерной задачи. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.4	Сравнение плоского напряжённого состояния и плоской деформации. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.5	Функция напряжений Эри 2 академических часа Определение напряжений через вторые производные функции Эри при отсутствии объёмных сил. Тождественное выполнение равновесия и получение бигармонического уравнения. Связь функции Эри с условиями на прямолинейной границе. Полиномиальная функция второго и третьего порядка для однородного состояния и чистого изгиба. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.6	Проверка полиномиальной функции Эри и определение напряжений. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

3.7	Полиномиальные решения и принцип Сен Венана Подбор полинома Эри для прямоугольной полосы и определение коэффициентов из нагрузок. Восстановление деформаций и перемещений после определения напряжений. Сопоставление точного поля чистого изгиба с элементарной теорией балки. Принцип Сен Венана и влияние способа приложения статически эквивалентных торцевых нагрузок. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.8	Решение задачи чистого изгиба прямоугольной полосы. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1	2	2	мозговой штурм
3.9	Осесимметричная задача для толстостенного цилиндра Равновесие и деформации в полярных координатах при осевой симметрии. Решение Ламе $\sigma r = A - B/r^2$ и $\sigma\theta = A + B/r^2$; определение констант по давлениям. Радиальные перемещения при плоском напряжённом состоянии и плоской деформации. Наибольшие окружные напряжения, знаки давлений и проверка на внутренней и наружной поверхностях. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.10	Расчёт напряжений и перемещений толстостенного цилиндра по Ламе. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.11	Круглое отверстие и концентрация напряжений Постановка задачи Кирша для бесконечной пластины с ненагруженным круглым отверстием. Распределение окружного напряжения на контуре при одноосном растяжении; коэффициент концентрации. Отличие бесконечной пластины от полосы конечной ширины и выбор номинального напряжения. Концентрация у гладкого отверстия и сингулярность у острого угла; последствия для сеточного расчёта. /Лек/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.12	Распределение напряжений на контуре круглого отверстия по Киршу. /Пр/	5	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

3.13	Запись границ в усилиях и перемещениях для детали с симметрией. Обоснование выбора плоской модели для тонкой пластины и протяжённого тела. Подбор функции Эри для заданного однородного напряжённого состояния. Сравнение торцевых нагрузок с одинаковыми равнодействующей и моментом. Сравнение концентрации напряжений у отверстия и сингулярности острого угла. /Ср/	5	29,9	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
3.14	Консультации и проведение зачета /КрТО/	5	0,1	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 4. Кручение и энергетические методы							
4.1	Кручение призматического стержня по Сен Венану Предпосылки свободного кручения и кинематика перемещений с депланацией сечения. Связь угла закручивания на единицу длины с касательными напряжениями. Круглое сплошное сечение как точное решение и проверка крутящего момента. Границы применимости решения вдали от торцов; влияние стеснения депланации. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.2	Расчёт касательных напряжений и закручивания круглого вала. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.3	Функция Прандтля для некруглых сечений Введение функции напряжений кручения и уравнение Пуассона для односвязного сечения. Постоянство функции на свободной границе и выбор нулевой постоянной. Эллиптическое сечение как пример аналитического решения и неравномерности напряжений. Крутильная жёсткость некруглого сечения и её отличие от G, умноженного на полярный момент площади. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.4	Определение функции Прандтля и жёсткости эллиптического сечения. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

4.5	Энергия деформации и взаимность работ Плотность упругой энергии и её интегрирование по объёму. Теорема Клапейрона для пропорционально приложенной нагрузки в линейной системе. Теорема Бетти и взаимность перемещений в двух состояниях нагружения. Проверка энергетического баланса и взаимности как способ обнаружения ошибок модели. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.6	Расчёт энергии деформации и проверка взаимности работ. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.7	Виртуальные перемещения и слабая постановка Кинематически допустимые перемещения и вариации, равные нулю на закреплённой границе. Принцип виртуальных работ для трёхмерного упругого тела. Переход от сильной формы к слабой интегрированием по частям. Естественные и существенные граничные условия; требования к гладкости пробных функций. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.8	Получение слабой формы задачи упругости. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.9	Минимум потенциальной энергии и метод Ритца Полная потенциальная энергия для консервативной нагрузки и условие стационарности. Условия минимума в устойчивой линейной упругой задаче с устранёнными жёсткими движениями. Аппроксимация допустимых перемещений линейной комбинацией базисных функций. Получение системы для коэффициентов Ритца на примере продольной деформации стержня. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
4.10	Однопараметрическое приближение Ритца для растянутого стержня. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

4.11	Проверка распределения напряжений при свободном кручении круглого вала. Сопоставление крутильной и изгибной геометрических характеристик сечения. Проверка теоремы Бетти для двух нагрузок линейной системы. Переход от сильной постановки к слабой с выделением граничных интегралов. Сравнение одночленного и двухчленного приближений Ритца. /Ср/	6	25	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
	Раздел 5. Инженерное применение задач теории упругости							
5.1	Конечный элемент плоской упругости Узловые перемещения и функции формы линейного треугольного элемента. Матрица деформаций B и матрица упругости D с учётом принятой плоской модели. Получение жёсткости элемента $K_e = \int B^T D B \, dV$ и учёт толщины пластины. Постоянство деформаций внутри линейного треугольника и воспроизведение линейного поля перемещений. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.2	Вычисление матриц B и D и напряжений линейного треугольника. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.3	Сборка системы и граничные условия Связь локальной и глобальной нумерации степеней свободы; сборка K и f. Согласованный вектор узловых сил для распределённой нагрузки. Задание ненулевых перемещений и удаление жёстких движений без лишних связей. Определение реакций по исходной системе и проверка равновесия всей модели. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.4	Сборка малой конечноэлементной системы и определение реакций. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

5.5	Сходимость и верификация конечноэлементной модели Измельчение сетки и повышение порядка аппроксимации как разные пути уточнения. Сходимость перемещений, энергии и напряжений; выбор контролируемой величины и точки. Сопоставление с решениями Ламе и Кирша; отделение ошибки дискретизации от ошибки постановки. Усреднённые узловые напряжения, сингулярности и недостоверность одного максимума на цветовой карте. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.6	Оценка сеточной сходимости по серии расчётов. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.7	Линейная термоупругость Разделение полной деформации на упругую и температурную части. Закон Гука с температурной деформацией $\alpha\Delta T$ для изотропного материала. Свободное расширение и равномерный нагрев стержня с запретом продольного перемещения. Температурная нагрузка в слабой форме при заранее заданном поле температуры. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.8	Расчёт свободного и стеснённого температурного расширения. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.9	Неравномерный нагрев и совместность температурных деформаций Заданное неоднородное температурное поле и отличие термоупругой задачи от задачи теплопроводности. Проверка совместности свободных температурных деформаций в плоском теле. Линейный градиент температуры по толщине свободной полосы и её температурная кривизна. Ограничение деформаций и возникновение напряжений; отличие результатов плоской и пространственной моделей. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.10	Определение температурной кривизны свободной полосы. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

5.11	Анизотропная упругость и ориентация материала Различие изотропии и ортотропии; независимые параметры в плоской задаче. Соотношения взаимности ν12/E1 = ν21/E2 и положительность матрицы податливости. Поворот материальных осей относительно геометрии детали и изменение отклика. Выбор материальной модели для прокатной детали или композита; какие данные нельзя заменять E и ν. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.12	Построение матрицы податливости ортотропного материала. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.13	Инженерный расчёт и обоснование достоверности Последовательность построения модели втулки под давлением: геометрия, материал, нагрузка, закрепления. Выбор аналитического эталона и набора сеток; сравнение напряжений и радиальных перемещений. Параметрическое изменение толщины стенки и коэффициента Пуассона в пределах выбранной модели. Различие верификации и валидации; границы линейной упругости и содержание воспроизводимого расчётного отчёта. /Лек/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			
5.14	Проверка конечноэлементного расчёта втулки по аналитическому эталону. /Пр/	6	2	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1	2	2	командная работа
5.15	Проверка линейного треугольника на однородной деформации. Анализ причин вырожденности матрицы жёсткости незакреплённой модели. Построение графиков сеточной сходимости перемещений и напряжений. Сравнение свободного нагрева и нагрева при ограниченных перемещениях. Проверка совместности заданного температурного поля. Анализ влияния ориентации осей ортотропного материала. Подготовка воспроизводимого отчёта о расчёте втулки с оценкой погрешности. /Ср/	6	39	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

5.16	Консультации и проведение экзамена /КрЭк/	6	0,3	ПК-1	Л1.1Л2.1Л3.1			

5. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

5.1. Контрольные вопросы и задания

1. Какие допущения отличают классическую линейную теорию упругости от модели с большими деформациями? Когда стержневой расчёт детали недостаточен?
2. Как из тензора напряжений и нормали к площадке определить вектор напряжений, нормальную и касательную составляющие?
3. Как получить дифференциальные уравнения равновесия и почему тензор напряжений симметричен?
4. Как находят главные напряжения и направления? Что остаётся неизменным при повороте координат?
5. Как связаны шаровая и девиаторная части тензора с объёмным изменением и изменением формы? Как вычисляют напряжение по Мизесу?
6. Как получить малые деформации и повороты из перемещений? Почему γxy и εxy различаются вдвое?
7. Какой смысл имеет условие совместности плоских деформаций? Достаточно ли произвольно задать три функции εx, εy, γxy?
8. Как восстановить перемещения по совместному полю деформаций? Какая неопределённость остаётся?
9. Как записать закон Гука в прямой и обратной формах? Каковы связи и допустимые значения упругих констант изотропного материала?
10. Из каких уравнений и граничных условий состоит краевая задача? Как проверить полноту её постановки?
11. Как получить уравнения Навье в перемещениях? Какие предпосылки нужны для постоянных коэффициентов?
12. В чём различие существенных и естественных условий? Какие дополнительные требования возникают в задаче только в усилиях?
13. При каких условиях обоснованы плоское напряжённое состояние и плоская деформация? Как определяют εz и σz?
14. Почему функция Эри обеспечивает равновесие и когда должна удовлетворять бигармоническому уравнению?
15. Как определить коэффициенты полиномиальной функции Эри по нагрузкам на границах полосы?
16. Что утверждает принцип Сен Венана? Почему он не позволяет игнорировать локальную концентрацию у места приложения силы?
17. Как вывести решение Ламе и определить радиальное перемещение? Как влияют осевые ограничения?
18. Как меняется окружное напряжение вдоль круглого отверстия по Киршу? От чего зависит применимость коэффициента концентрации 3?
19. Какие перемещения допускает свободное кручение Сен Венана и что означает депланация сечения?
20. Как записать уравнение и граничное условие для функции Прандтля в односвязном сечении? Как определить момент?
21. Почему для некруглого сечения крутильная характеристика не совпадает с полярным моментом площади?
22. Как вычисляют плотность и полную энергию деформации? В каких условиях выполняется теорема Клапейрона?
23. Как сформулировать теорему Бетти и использовать её для проверки расчёта?
24. Как получить принцип виртуальных работ из уравнений равновесия? Какие ограничения наложены на виртуальные перемещения?
25. Как из минимума потенциальной энергии получить систему метода Ритца? Почему пробное поле должно удовлетворять заданным перемещениям?
26. Как построить функции формы и матрицу B линейного треугольника? Почему его деформации постоянны?
27. Как вычисляют матрицу жёсткости элемента и учитывают толщину и распределённую нагрузку?
28. Как собирают глобальную систему, задают ненулевые перемещения и вычисляют реакции?
29. Какие жёсткие движения нужно исключить в плоской и пространственной моделях? Чем опасны лишние связи?
30. Как организовать проверку сеточной сходимости? Почему сходимость перемещений не гарантирует точности локального напряжения?
31. Как отличить физическую концентрацию от сингулярности? Что изменяет усреднение напряжений при постобработке?
32. Как вводится температурная деформация в закон Гука? Чем отличаются свободное расширение и стеснённый нагрев?
33. Почему неоднородное температурное поле может вызывать напряжения даже без внешних сил? Какова роль совместности?
34. Как определить кривизну свободной полосы при линейном градиенте температуры по толщине? Как меняется ответ при запрете изгиба?
35. Какие параметры задают плоскую ортотропию и каково условие взаимности? Почему необходимо учитывать ориентацию материала?
36. Чем различаются верификация и валидация? Какие данные отчёта позволяют воспроизвести расчёт втулки под давлением?

5.2. Темы курсовых работ (проектов)

Курсовых работ не предусмотрено

5.3. Фонд оценочных средств

Распределение контроля по содержанию
Темы Текущий контроль Материалы фонда
Лекции 1–6 Опрос, ПР 1–6, тест Вопросы 1–9; тест 1–5; задачи З1–З3
Лекции 7–12 Опрос, ПР 7–12, контрольная К1 Вопросы 10–18; тест 6–8; задачи З4–З6
Лекции 13–17 Опрос, ПР 13–17, контрольная К2 Вопросы 19–25; тест 9–10; задачи З7–З8
Лекции 18–24 ПР 18–24, расчётная работа, опрос Вопросы 26–36; тест 11–12; задачи З9–З12

Контрольные вопросы для текущего контроля и промежуточной аттестации

1. Какие допущения отличают классическую линейную теорию упругости от модели с большими деформациями? Когда стержневой расчёт детали недостаточен?
2. Как из тензора напряжений и нормали к площадке определить вектор напряжений, нормальную и касательную составляющие?
3. Как получить дифференциальные уравнения равновесия и почему тензор напряжений симметричен?
4. Как находят главные напряжения и направления? Что остаётся неизменным при повороте координат?
5. Как связаны шаровая и девиаторная части тензора с объёмным изменением и изменением формы? Как вычисляют напряжение по Мизесу?
6. Как получить малые деформации и повороты из перемещений? Почему γxy и εxy различаются вдвое?
7. Какой смысл имеет условие совместности плоских деформаций? Достаточно ли произвольно задать три функции εx, εy, γxy?
8. Как восстановить перемещения по совместному полю деформаций? Какая неопределённость остаётся?
9. Как записать закон Гука в прямой и обратной формах? Каковы связи и допустимые значения упругих констант изотропного материала?
10. Из каких уравнений и граничных условий состоит краевая задача? Как проверить полноту её постановки?
11. Как получить уравнения Навье в перемещениях? Какие предпосылки нужны для постоянных коэффициентов?
12. В чём различие существенных и естественных условий? Какие дополнительные требования возникают в задаче только в усилиях?
13. При каких условиях обоснованы плоское напряжённое состояние и плоская деформация? Как определяют εz и σz?
14. Почему функция Эри обеспечивает равновесие и когда должна удовлетворять бигармоническому уравнению?
15. Как определить коэффициенты полиномиальной функции Эри по нагрузкам на границах полосы?
16. Что утверждает принцип Сен Венана? Почему он не позволяет игнорировать локальную концентрацию у места приложения силы?
17. Как вывести решение Ламе и определить радиальное перемещение? Как влияют осевые ограничения?
18. Как меняется окружное напряжение вдоль круглого отверстия по Киршу? От чего зависит применимость коэффициента концентрации 3?
19. Какие перемещения допускает свободное кручение Сен Венана и что означает депланация сечения?
20. Как записать уравнение и граничное условие для функции Прандтля в односвязном сечении? Как определить момент?
21. Почему для некруглого сечения крутильная характеристика не совпадает с полярным моментом площади?
22. Как вычисляют плотность и полную энергию деформации? В каких условиях выполняется теорема Клапейрона?
23. Как сформулировать теорему Бетти и использовать её для проверки расчёта?
24. Как получить принцип виртуальных работ из уравнений равновесия? Какие ограничения наложены на виртуальные перемещения?
25. Как из минимума потенциальной энергии получить систему метода Ритца? Почему пробное поле должно удовлетворять заданным перемещениям?
26. Как построить функции формы и матрицу B линейного треугольника? Почему его деформации постоянны?
27. Как вычисляют матрицу жёсткости элемента и учитывают толщину и распределённую нагрузку?
28. Как собирают глобальную систему, задают ненулевые перемещения и вычисляют реакции?
29. Какие жёсткие движения нужно исключить в плоской и пространственной моделях? Чем опасны лишние связи?
30. Как организовать проверку сеточной сходимости? Почему сходимость перемещений не гарантирует точности локального напряжения?
31. Как отличить физическую концентрацию от сингулярности? Что изменяет усреднение напряжений при постобработке?
32. Как вводится температурная деформация в закон Гука? Чем отличаются свободное расширение и стеснённый нагрев?
33. Почему неоднородное температурное поле может вызывать напряжения даже без внешних сил? Какова роль совместности?
34. Как определить кривизну свободной полосы при линейном градиенте температуры по толщине? Как меняется ответ при запрете изгиба?
35. Какие параметры задают плоскую ортотропию и каково условие взаимности? Почему необходимо учитывать ориентацию материала?
36. Чем различаются верификация и валидация? Какие данные отчёта позволяют воспроизвести расчёт втулки под давлением?

Ориентиры для оценивания устного ответа

Полный ответ содержит физический смысл, корректные обозначения и уравнения, предпосылки применимости и проверочный инженерный пример. Для вопросов 10–18 обязательны границы и граничные условия; для 19–25 — допустимость полей и энергетические предпосылки; для 26–31 — дискретизация и проверка результатов; для 32–36 — температурные ограничения, свойства материала или обоснование достоверности. Простого перечисления терминов недостаточно.

Тестовые задания

В каждом задании выберите один правильный вариант. Время — 15 минут; 1 балл за правильный ответ, 0 за неверный. Задания 1–8 относятся к 5-му семестру; весь комплект применяется после изучения курса.

T1. Вектор напряжений на площадке с нормалью n равен: А) σn; Б) σ + n; В) div σ; Г) E n.

T2. При малых деформациях инженерный сдвиг γxy равен: А) εxy; Б) 2εxy; В) εxy/2; Г) εx + εy.

T3. Для устойчивого изотропного линейно упругого материала при E > 0 коэффициент Пуассона находится в интервале: А) 0 < ν < 1; Б) −1 < ν < 0,5; В) ν > 0,5; Г) −2 < ν < −1.

T4. Поле перемещений малого жёсткого поворота даёт: А) ненулевую объёмную деформацию; Б) ненулевые все деформации; В) нулевые малые деформации; Г) только нормальные деформации.

Т5. Условия совместности нужны для: А) определения плотности; Б) существования соответствующего поля перемещений; В) задания давления; Г) выбора единиц.
Т6. При плоской деформации: А) σ_z всегда равно нулю; Б) $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$; В) $\nu = 0$; Г) все напряжения равны нулю.
Т7. В однородной изотропной плоской задаче без объёмных сил функция Эри удовлетворяет: А) $\Delta\Phi = 0$ во всех случаях; Б) $\Delta^2\Phi = 0$; В) $\Phi = E$; Г) $\operatorname{div}\Phi = 1$.
Т8. Коэффициент концентрации 3 в задаче Кирша относится к: А) любому отверстию в любой детали; Б) бесконечной пластине с круглым свободным отверстием при одноосном растяжении; В) острой трещине; Г) чистому сдвигу без отверстия.
Т9. В методе Ритца пробные перемещения обязаны удовлетворять: А) только уравнениям равновесия; Б) заданным кинематическим условиям; В) только естественным условиям поточечно; Г) только условию нулевой энергии.
Т10. Для свободного кручения некруглого стержня крутильная характеристика: А) всегда равна полярному моменту площади; Б) всегда равна площади; В) в общем случае отличается от полярного момента площади; Г) не зависит от формы сечения.
Т11. При равномерном нагреве свободного однородного изотропного тела без внешних сил: А) $\sigma = 0$ при свободно реализуемом расширении; Б) $\sigma = E\alpha\Delta T$ при любых границах; В) $\varepsilon = 0$; Г) ν обязательно равен нулю.
Т12. Рост максимума напряжений у острого закреплённого угла при измельчении сетки требует: А) признать последний максимум точным; Б) исследовать сингулярность и контролировать осмысленные величины; В) прекратить проверку реакций; Г) обнулить напряжения.
Ключ: 1 — А; 2 — Б; 3 — Б; 4 — В; 5 — Б; 6 — Б; 7 — Б; 8 — Б; 9 — Б; 10 — В; 11 — А; 12 — Б. Для полного теста: 11–12 баллов — отлично; 9–10 — хорошо; 7–8 — удовлетворительно; 0–6 — неудовлетворительно. Для сокращённого теста из 8 вопросов: 8 / 6–7 / 5 / 0–4 соответственно.

Расчётные задания
Везде, где не указано иное, материал однородный, изотропный, линейно упругий, деформации малы, объёмные силы отсутствуют. Положительные нормальные напряжения соответствуют растяжению. γ — инженерный сдвиг. Числа являются учебными исходными данными и не характеризуют конкретную марку материала.
31 Напряжения на площадке и главные значения
В точке $\sigma_x = 80$ МПа, $\sigma_y = 20$ МПа, $\tau_{xy} = 30$ МПа; остальные компоненты равны нулю. Нормаль к площадке $n = (3/5; 4/5; 0)$. Найдите t, σ_n, модуль касательной составляющей, главные напряжения и напряжение по Мизесу.
Ориентир для проверки. $t = (72; 34; 0)$ МПа; $\sigma_n = 70{,}4$ МПа; $|\tau_n| = 37{,}2$ МПа. Главные напряжения в порядке убывания: 92,426; 7,574; 0 МПа. $\sigma_M = \sqrt{7900} = 88{,}882$ МПа. Проверка: $t \cdot t = \sigma_n^2 + \tau_n^2$.
32 Деформации и совместность
На плоскости x, y в метрах заданы $u = a\,x^2$, $v = -2axy$, где $a = 0{,}001$ м$^{-1}$. Найдите ε_x, ε_y, γ_{xy} и проверьте $\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} = \gamma_{xy,xy}$. Вычислите компоненты в точке (0,2; 0,1) м.
Ориентир для проверки. $\varepsilon_x = 2ax$; $\varepsilon_y = -2ax$; $\gamma_{xy} = -2ay$. В указанной точке: 0,0004; −0,0004; −0,0002. Обе части условия совместности равны нулю; $\varepsilon_{xy} = -0{,}0001$.
33 Выбор плоской модели
$E = 200$ ГПа, $\nu = 0{,}3$; $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_y = 50$ МПа, $\tau_{xy} = 0$. Для плоского напряжённого состояния определите ε_x, ε_y, ε_z. Затем для тех же σ_x и σ_y при плоской деформации найдите σ_z, ε_x, ε_y.
Ориентир для проверки. Плоское напряжённое состояние: $\varepsilon_x = 0{,}000425$; $\varepsilon_y = 0{,}000100$; $\varepsilon_z = -0{,}000225$. Плоская деформация: $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) = 45$ МПа; $\varepsilon_x = 0{,}0003575$; $\varepsilon_y = 0{,}0000325$; $\varepsilon_z = 0$.
34 Функция Эри
Задана $\Phi = A\,y^2/2 + B\,x^2/2 - Cxy$, где $A = 60$ МПа, $B = 20$ МПа, $C = 10$ МПа; координаты в метрах, Φ в МПа·м². Найдите напряжения, проверьте равновесие и бигармоничность, определите вектор напряжений на границе с $n = (0; 1)$.
Ориентир для проверки. $\sigma_x = \Phi_{,yy} = 60$ МПа; $\sigma_y = \Phi_{,xx} = 20$ МПа; $\tau_{xy} = -\Phi_{,xy} = 10$ МПа. Производные напряжений равны нулю; $\Delta^2\Phi = 0$. На указанной границе $t = (10; 20)$ МПа.
35 Толстостенный цилиндр
Внутренний радиус $a = 20$ мм, наружный $b = 40$ мм; внутреннее давление $p_i = 30$ МПа, наружное $p_o = 0$. Принять плоскую деформацию, $E = 210000$ МПа, $\nu = 0{,}3$. Определите A, B, σ_r и σ_θ на обоих радиусах, σ_z и $u(a)$.
Ориентир для проверки. $A = (p_i a^2 - p_o b^2)/(b^2 - a^2) = 10$ МПа; $B = (p_i - p_o)a^2b^2/(b^2 - a^2) = 16000$ МПа·мм². При $r = a$: $\sigma_r = -30$, $\sigma_\theta = 50$ МПа; при $r = b$: $\sigma_r = 0$, $\sigma_\theta = 20$ МПа. $\sigma_z = 2\nu A = 6$ МПа; $u(r) = (1 + \nu)[(1 - 2\nu)Ar + B/r]/E$; $u(a) = 0{,}005448$ мм.
36 Концентрация у круглого отверстия
Бесконечная пластина с круглым ненагруженным отверстием растягивается вдоль x напряжением $\sigma_\infty = 40$ МПа. Угол θ отсчитывается от x. Найдите $\sigma_{\theta\theta}$ на контуре при $\theta = 0°$, 45°, 90° и коэффициент концентрации относительно σ_∞.
Ориентир для проверки. На контуре $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_\infty(1 - 2\cos 2\theta)$. Значения: −40; 40; 120 МПа. $\sigma_{rr} = \tau_{r\theta} = 0$; $K_t = 120/40 = 3$. Это эталон бесконечной пластины; он не является точным ответом для полосы конечной ширины.
37 Кручение круглого вала
Сплошной вал радиуса $R = 10$ мм и длины $L = 1000$ мм нагружен моментом $T = 100$ Н·м; $G = 80000$ МПа. Найдите полярный момент площади, τ_{max}, угол закручивания и энергию. Пренебречь торцевыми эффектами.
Ориентир для проверки. $J_p = \pi R^4/2 = 15707{,}963$ мм⁴; $T = 100000$ Н·мм. $\tau_{max} = TR/J_p = 63{,}662$ МПа; $\varphi = TL/(GJ_p) = 0{,}07958$ рад; $U = T\varphi/2 = 3978{,}874$ Н·мм $= 3{,}9789$ Дж.
38 Одночленное приближение Ритца
Стержень длины $L = 1000$ мм с $EA = 20000000$ Н закреплён при $x = 0$; на свободном конце сила $F = 10000$ Н. По длине действует постоянная продольная нагрузка $q = 10$ Н/мм в положительном направлении x. Примите $u = c\,x$. Составьте $\Pi(c)$, найдите c и $u(L)$, сравните с точным перемещением конца.
Ориентир для проверки. $\Pi = EA\,L\,c^2/2 - F\,c\,L - q\,c\,L^2/2$. $c = (F + qL/2)/EA = 0{,}00075$; $u(L) = 0{,}75$ мм. Точное поле $u(x) = [(F + qL)x - qx^2/2]/EA$; $u(L)$ также 0,75 мм, но $u(x)$ и напряжения внутри отличаются от одночленного приближения. Совпадение одного перемещения не доказывает точность поля.

39 Равномерный нагрев стержня
E = 200000 МПа, α = 12·10⁻⁶ K⁻¹, ΔT = 50 K, L = 1000 мм. Сравните свободное нагревание и нагрев при полном запрете продольного удлинения. Боковые поверхности свободны; трёхосное стеснение не предполагается.
Ориентир для проверки. Свободный стержень: εx = αΔT = 0,0006, ΔL = 0,6 мм, σx = 0. При запрете удлинения: εx = 0; σx = −EαΔT = −120 МПа. Отрицательный знак означает сжатие; боковые деформации не равны нулю.
310 Линейный треугольный элемент
Узлы в миллиметрах: 1 (0; 0), 2 (100; 0), 3 (0; 100). Узловые перемещения (u, v) в мм: (0; 0), (0,1; 0), (0; −0,03). E = 200000 МПа, ν = 0,3; плоское напряжённое состояние. Постройте функции формы, найдите постоянные деформации и напряжения.
Ориентир для проверки. N1 = 1 − x/100 − y/100; N2 = x/100; N3 = y/100. εx = 0,001; εy = −0,0003; γxy = 0. σx = E(εx + νεy)/(1 − ν²) = 200 МПа; σy = 0; τxy = 0. Воспроизведено однородное одноосное состояние.
311 Оценка сеточной сходимости
Для трёх сеток с шагами h, h/2, h/4 перемещение в одной точке равно 0,480; 0,495; 0,499 мм. Аналитический эталон 0,500 мм. Найдите относительные ошибки и относительное изменение между двумя последними сетками; оцените наблюдаемый порядок p = ln(|u1 − u2|/|u2 − u3|)/ln 2.
Ориентир для проверки. Ошибки относительно эталона: 4%; 1%; 0,2%. Изменение относительно последнего значения: |0,499 − 0,495|/0,499 ≈ 0,802%. p ≈ 1,907. Три значения позволяют оценить тенденцию, но не доказывают точность напряжений или асимптотический режим.
312 Верификация модели втулки
Используйте цилиндр из 35 как двумерное кольцо в плоской деформации. Постройте три последовательно сгущаемые сетки. Давление прикладывайте нормально к внутреннему контуру, наружный контур свободен. Устраните три плоских жёстких движения минимальными совместимыми связями. Сравните σθ(a), u(a), σr(a), σr(b) с эталоном; представьте сходимость и объясните способ извлечения напряжений.
Ориентир для проверки. Эталон: σθ(a) = 50 МПа; u(a) = 0,005448 мм; σr(a) = −30 МПа; σr(b) = 0. Для полного кольца совместимый вариант связей: uy = 0 в (b; 0) и (−b; 0), ux = 0 в (0; b). Эти связи допускают осесимметричное расширение. Сравнивать окружное напряжение в одинаковых точках или по оговорённой экстраполяции. Оценивается обоснованная сходимость; универсальный обязательный процент точности без выбора элемента и сетки не задаётся.
Контрольные работы
К1, 5 семестр, 45 минут: 33, 35, 36. По 10 баллов за задачу. К2, 6 семестр, 45 минут: 37, 38, 39. По 10 баллов за задачу. Для обеих работ: 27–30 баллов — отлично; 23–26 — хорошо; 18–22 — удовлетворительно; 0–17 — неудовлетворительно. Задания допускают калькулятор и выданную преподавателем таблицу упругих констант; готовые решения не используются. Дополнительные варианты создаются изменением E, нагрузок и размеров при сохранении физических ограничений и единиц. Перед выдачей нового варианта преподаватель пересчитывает ключ. Варианты с ν = 0,5 в стандартной изотропной модели не используются.
Расчётная работа с компьютерной моделью
Задание — 312; опора на ПР 11, 19, 20 и 24 и СР 24. В отчёте представить постановку и допущения, аналитическое решение, материал и единицы, нагрузки и связи, тип элементов и три сетки, таблицу сравнения, график сходимости, проверку равновесия, вывод о границах применимости. Приложить исходный проект или скрипт, параметры расчёта и версию программной среды. Конкретный программный продукт не влияет на оценку.
Защита включает объяснение выбора плоской деформации, осевых напряжений и закреплений, а также повторный расчёт при одном изменённом параметре. Ответы должны подтверждать, что обучающийся понимает использованную модель и может воспроизвести результат.

5.4. Перечень видов оценочных средств

Устный опрос по вопросам к лекциям и разбору расчётных предпосылок.
Короткий тест по обозначениям, моделям и уравнениям теории упругости.
Проверка и защита практических работ с пояснением расчёта и единиц измерения.
Письменная контрольная работа с аналитическими задачами.
Собеседование по результатам самостоятельной работы.
Комплект вопросов и расчётных заданий для промежуточной аттестации.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

6.1. Рекомендуемая литература

6.1.1. Основная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л1.1	Рудаев Я.И.	Основы теории упругости: учебник	Бишкек: Изд-во КРСУ 2020

6.1.2. Дополнительная литература

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л2.1	Самуль В.И.	Основы теории упругости и пластичности: учебное пособие для студентов вузов	М.: Высш. школа 1982

6.1.3. Методические разработки

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год

	Авторы, составители	Заглавие	Издательство, год
Л3.1	Александров А.В., Потапов В. Д.	Сопротивление материалов. Основы теории упругости и пластичности: учебник для вузов	М.: Высш. шк. 2002

6.3. Перечень информационных и образовательных технологий

6.3.1 Компетентностно-ориентированные образовательные технологии

6.3.1.1	Scilab
6.3.1.2	Матричные вычисления, собственные значения тензора, аналитические зависимости, построение графиков и обработка сеточных результатов. https://www.scilab.org/about
6.3.1.3	FEniCSx DOLFINx
6.3.1.4	Реализация слабой формы линейной упругости, задание граничных условий и расчёт полей напряжений. Использовать совместимую среду Python и документацию установленной версии. https://docs.fenicsproject.org/dolfinx/
6.3.1.5	Gmsh
6.3.1.6	Подготовка геометрии и сеток, локальное сгущение у отверстий и границ, маркировка областей и контуров. https://gmsh.info/doc/texinfo/
6.3.1.7	ParaView
6.3.1.8	Просмотр полей перемещений и напряжений, извлечение значений вдоль линий, сравнение сеточных решений. https://docs.paraview.org/

6.3.2 Перечень информационных справочных систем и программного обеспечения

6.3.2.1	eLIBRARY RU
6.3.2.2	Научная библиографическая база для поиска статей по механике деформируемого твёрдого тела и численным методам. Доступность полного текста проверяется для конкретной публикации. https://elibrary.ru/
6.3.2.3	Math Net Ru
6.3.2.4	Научная информационная система для поиска публикаций по математике, механике и смежным дисциплинам. https://www.mathnet.ru/
6.3.2.5	КиберЛенинка
6.3.2.6	Открытая научная электронная библиотека; поиск статей по механике, машиностроению и расчётным методам. https://cyberleninka.ru/
6.3.2.7	NIST Digital Library of Mathematical Functions
6.3.2.8	Справочная система по математическим функциям, тождествам и методам их вычисления, необходимым в аналитических решениях. https://dlmf.nist.gov/

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Подготовка к изучению тем

Повторите операции с векторами и матрицами, собственные значения, частные производные, интегрирование по области, уравнения математической физики, равновесие сил и моментов и основные зависимости сопротивления материалов. При затруднении сначала разберите простой случай одноосного растяжения, затем переходите к пространственным полям. Перед лекцией просмотрите название и вопросы темы. После лекции восстановите вывод ключевого соотношения и запишите рядом его предпосылки. Ведите единый словарь обозначений: σ — напряжения; ε — малые тензорные деформации; γ — инженерные сдвиги; u — перемещения; t — поверхностная нагрузка. Согласуйте порядок компонент в матричной записи с используемой программой.

Последовательность решения аналитической задачи

1. Нарисуйте область, оси и нагрузки; укажите размеры и единицы. Разделите заданные и искомые величины.
2. Выберите пространственную или плоскую модель и обоснуйте её. Запишите свойства материала и допустимость малых деформаций.
3. Выпишите уравнения равновесия, геометрические и физические соотношения в нужной форме. Разделите границу на участки с усилиями и перемещениями.
4. Выберите метод: непосредственное интегрирование, функция Эри, решение Ламе, функция Прандтля или энергетическое приближение.
5. Определите постоянные из граничных условий. Для функций Эри отдельно проверьте бигармоничность и напряжения на границе.
6. Вычислите искомые величины, проверьте единицы и знаки. Сопоставьте с предельным случаем и физическим смыслом.

Работа с компьютерной моделью

Начинайте с задачи с известным решением. До построения сетки определите, какое перемещение или напряжение будете сравнивать с эталоном и где оно измеряется. Храните геометрию, параметры материала, нагрузки, связи и настройки решения вместе с исходным файлом.

Сначала проверьте тип плоской модели, толщину, систему единиц и отсутствие свободных жёстких движений. Определите реакции по исходной системе и сравните суммарные силы и моменты с нагрузкой. Для осесимметричного давления на

полное кольцо суммарный вектор сил равен нулю; одного этого условия недостаточно для подтверждения правильного распределения нагрузки.
Используйте не менее трёх сеток при одинаковой постановке. Сравнивайте значения в одной точке, энергию или согласованную интегральную величину. Указывайте, откуда взяты напряжения: из точки интегрирования, центра элемента или после узлового усреднения. У острого угла растущий максимум может отражать сингулярность модели; обоснуйте другой показатель или уточнение геометрии.
При моделировании нагрева явно укажите исходную температуру, приращение температуры, коэффициент расширения и ограничения перемещений. В данном курсе температурное поле задаётся; решение теплопроводности является отдельной задачей. Для ортотропии дополнительно задавайте направления материальных осей и согласованные упругие константы.
Самостоятельная работа и подготовка к контролю
Выполняйте СР после соответствующей лекции. Для каждого результата сохраняйте краткую запись исходных данных, формул, вычислений и проверки. В СР 1–12 основное внимание уделяйте постановке задачи и аналитическим полям; в СР 13–24 — энергетическим методам, численной проверке, температурным воздействиям и обоснованию материала.
Готовясь к опросу, отвечайте на вопросы без чтения конспекта: сначала физический смысл, затем уравнения, условия применимости и пример. При подготовке к контрольной решите задачи соответствующего блока и сравните результат с ключом только после самостоятельного решения. Если ответ отличается, последовательно проверьте единицы, знаки, коэффициент 2 в сдвиговых компонентах и выбор плоской модели.
К защите расчётной работы подготовьте исходный проект, таблицу сеток, аналитический эталон и графики сравнения. Будьте готовы объяснить каждое закрепление и повторить расчёт при изменении давления или толщины. Цветовая карта без численного сравнения не подтверждает точность.